Faculté de Médecine Alger
1ière année Médecine

Année 2014/2015

Biostatistique : Variables aléatoires

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée ci-après :

Valeurs possibles de X	-2	-1	0	1,5	2
probabilités	0,3	0,1	0,2	0,1	?

1. Compléter le tableau et tracer la fonction de répartition.
2. Calculer E(X) et σ (X).
3. Calculer $P(0<X\leq 1{,}5)$ et $P(0<X<1{,}5)$

Exercice 2

Imaginons le jeu suivant : d'un sac contenant 2 jetons rouges, 3 jetons blancs et 4 jetons verts, nous tirons au hasard un jeton :

- s'il est rouge, nous gagnons 100 dinars ;
- s'il est blanc, nous perdons 80 dinars ;
- s'il est vert, nous tirons un second jeton du sac sans avoir remis le jeton tiré en premier, si ce second jeton est :
  - rouge, nous gagnons 50 dinars ;
  - blanc, nous perdons 25 dinars ;
  - vert, nous ne gagnons rien mais nous ne perdons rien.

Nous supposerons qu'`a chaque tirage il y a équiprobabilité de sortie de chacun des jetons.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain d'un joueur à ce jeu.
2. Calculer E(X) et V(X).

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	-1	0	1	2
proba	2/7	1/7	3/7	1/7

1. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 1 + X^2$. Donner la loi de Y .
2. Montrer que $E(X^2) = 9/7$ et $E(X^4) = 21/7$.
3. Calculer de deux manières différentes E(Y) et V(Y).

Exercice 4

Soit X la v.a discontinue définie par la loi de probabilité P(X=k) =A.k avec k=1,2,3.

1. Calculer A pour que P(X=k) soit effectivement une loi de probabilité.
2. Calculer E(X), V(X), σ(X)
3. Soit Y une seconde v.a discontinue définie par la loi de probabilité

$Y=y_i$	0	1
$P=P(Y=y_i)$	0,6	0,4

   Calculer E(Y), V(Y), σ(Y)
4. Les v.a X et Y sont supposées indépendantes.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la v.a S=X+Y.
   b. Calculer E(S), V(S), σ(S)
5. Soit T = X-2Y ; calculer E(T), V(T), σ(T)

YAHI.F

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes a) $\int_0^4 (x-3)\,dx$ b) $\int_1^2 (t^2-4t+3)\,dt$ c) $\int^2 (t^2+t-\frac{1}{t})\,dt$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminez la valeur de c afin que f soit une fonction de densité.

a) $f(x)=\begin{cases} cx & si\ 0<x<3 \\ 0 & \sin on \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{7} & si\ 5<x<c \\ 0 & \sin on \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} & si\ 0<x<1 \\ c^2 & si\ 1\leq x<2 \\ 0 & \sin on \end{cases}$

Exercice 7

Une v.a continue admet pour densité de probabilité la fonction f(x) :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+k & pour\ x\in[-1,1] \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que f(x) soit effectivement une densité de probabilité
2. Déterminer la fonction de répartition de X
3. Calculer P(0< X < 3)
4. Calculer E(X), V(X), σ(X) et la médiane

Exercice 8

Une v.a continue admet pour densité de probabilité la fonction f(x) :

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-\lambda x} & pour\ x>0 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que f(x) soit effectivement une densité de probabilité.
   La variable X est dite alors de loi exponentielle de paramètre λ ; $X \to \varepsilon(\lambda)$, $\lambda>0$
2. Calculer E(X), V(X), σ(X)
3. Déterminer la fonction de répartition de X
4. Calculer P(0< X < 3)

Exercice 9

Soit X une v.a continue de fonction de répartition $F_X(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ \frac{x}{2} & si\ 0\leq x<2 \\ 1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

1. Calculer P(1,2<X<1,3)
2. Pour quelles valeurs de x a t-on P(X<x)=0,8 ; P(X≥x)=0,4 ? Que représentent ces valeurs ?
3. Donner la densité de probabilité de X
4. Calculer la moyenne et la variance de cette distribution

Exercice 10

Soit X la v.a discontinue définie par la loi de probabilité $P(X=k) = A.k$ avec $k=1,2,3$.

6. Calculer A pour que $P(X=k)$ soit effectivement une loi de probabilité.
7. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$
8. Soit Y une seconde v.a discontinue définie par la loi de probabilité

$Y=y_j$	0	1
$P=P(Y=y_j)$	0,6	0,4

Calculer $E(Y)$, $V(Y)$, $\sigma(Y)$

9. Les v.a X et Y sont supposées indépendantes.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la v.a $S=X+Y$.
   b. Calculer $E(S)$, $V(S)$, $\sigma(S)$
10. Soit $T = X-2Y$; calculer $E(T)$, $V(T)$, $\sigma(T)$

Exercice 11

Une urne contient 10 boules dont 5 rouges, 3 blanches et 2 noires. On tire successivement et avec remise 2 boules. Soit X la v.a désignant le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Soit $Y= -3X+2$. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Répondre de deux manières différentes aux questions 1 et 2.

Exercice 12

Un étudiant doit répondre à 4 Q.C.M. On lui propose 3 réponses possibles à chaque question dont une seule est correcte. En supposant que l'étudiant réponde au hasard à chaque question et que ses choix sont indépendants les uns des autres, quelle probabilité a t il de donner

1. 2 réponses correctes ?
2. plus de réponses correctes que de fausses ?

Exercice 13

La probabilité qu'un individu présente une allergie à un certain sérum donné est $p=0,3$. On injecte le sérum à 5 individus.

1. Quelle est la probabilité de la v.a nombre d'individus présentant une allergie ?
2. Quel est le nombre moyen d'individus allergiques ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au plus un individu présentant cette allergie ?

Exercice 14

Les services d'urgence d'un hôpital sont sollicités en moyenne 2 fois toutes les demi-heures. Si l'on admet que le nombre de cas d'urgence par demi-heure suit une loi de Poisson, calculer la probabilité que le nombre de cas d'urgence en une heure soit :

1. de 5 **2.** d'au moins 1.

Exercice 15

Un réservoir d'eau de 3000 litres contient des bactéries avec en moyenne 2 par litre. On admet qu'il est dangereux d'avaler 3 ou plus de ces bactéries et que le nombre de bactéries par litre d'eau suit une loi de Poisson.

1. Un passant assoiffé boit un litre de ce réservoir. Quelle est la probabilité que son geste le mette en danger ?
2. Que devient cette probabilité pour un passant qui aurait bu 1,5 litre ?

Exercice 16

Dans une population donnée, une maladie rare se présente avec une probabilité $p=0,01$. On extrait un échantillon de taille 100 et soit X le nombre d'individus présentant cette maladie.

1. Quelle est la loi de X ? Par quelle loi peut-on l'approximer ? Justifier
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux personnes ayant cette maladie ?

Exercice 17

Sur une population de 10000 personnes, on a observé 103 albinos. Soit X le nombre d'albinos que l'on peut observer sur un échantillon de 100 personnes prises au hasard. Calculer la probabilité :

1. de n'avoir aucun albinos ?
2. d'avoir au moins 10 albinos ?

Exercice 18

Soit U une v.a de loi Normale N(0,1)

1. Calculer $P(U < 2,4)$; $P(U \geq 1,23)$; $P(U > 3,2)$; $P(-1,96 < U < 1,96)$
2. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, tels que
   $P(X < u_1) = 0,950$; $P(X > u_2) = 0,25$; $P(X < u_3) = 0,015$

Exercice 19

Soit X une v.a de loi Normale de paramètres m=32 et $\sigma^2 = 49$

1. Calculer $P(X > 32)$; $P(X \geq 32)$; $P(X < 32+\sigma)$; $P(32 < X < 32+\sigma)$
2. Déterminer x_1, x_2, x_3, x_4, tels que
   $P(X < x_1) = 0,791$; $P(X > x_2) = 0,123$; $P(X < x_3) = 0,015$; $P(|X-32| < x_4) = 0,20$.

Exercice 20

Dans une population humaine, la mesure de la quantité d'urée dans le sang en (mg/100ml) a donné une moyenne de 27mg/100ml et une variance de 25 $(mg/100ml)^2$. On suppose que cette variable est de loi Normale. On prend un individu au hasard.

1. Quelle est la probabilité que sa quantité d'urée soit inférieure à 24,5 ?
2. Déterminer la limite x_0, appelé seuil pathologique, tel qu'il y ait 2,5% d'individus dont la quantité d'urée est supérieure à cette valeur x_0.

Exercice 21

On considère un échantillon de 300 étudiants dans lequel l'âge, (X), d'un individu est supposé être une v.a de loi $N(m, \sigma^2)$ avec m=21 ans.

1. Déterminer σ si l'on sait que $P(X > 22) = 30.85\%$.
2. Quelle est la probabilité que l'âge d'un étudiant soit compris entre 18 et 23 ans ?
3. Quel est le nombre d'étudiants dont l'âge dépasse 19 ans ?
4. Quel est l'âge minimal des 15,87% étudiants les plus âgés ?

Exercice 22

On veut connaître la proportion, p, d'individus d'une population très grande, résistant à un certain antibiotique. Sur un échantillon de 1000 individus, on a observé que le nombre moyen d'individus résistant à l'antibiotique est 62,5.

Soit X le nombre d'individus résistant à l'antibiotique parmi les 1000 observés.

1. Donner la loi de la v.a X et donner une estimation de la proportion p.
2. Par quelle loi peut-on approximer la loi de X ? Calculer alors $P(X > 30)$ et $P(30 < X < 40)$.

Exercice 23

Selon la loi de l'hérédité Mendélienne, la proportion théorique de sourds-muets de naissance est p=0,25 lorsque les parents sont des consanguins porteurs d'un certain gène récessif. On considère une population de nouveau-nés issus de tels parents.

1. Soit X le nombre d'enfants sourds-muets sur un échantillon de 10 enfants.
   Calculer $P(X > 1)$; $P(X \geq 1)$.
2. Soit Y le nombre d'enfants sourds-muets sur un échantillon de 300 enfants.
   a/ Déterminer la probabilité d'avoir au moins 60 sourds-muets parmi les 300 enfants.
   b/ Déterminer le nombre y_0 d'enfants tel que $P(Y > y_0) = ½$.

Exercice24

Dans une certaine pathologie, la durée d'hospitalisation est distribuée selon un χ^2 à 18 degrés de liberté.

➤ QCM 1

A. Lécart-type de la durée d'hospitalisation est 6 jours
B. 50% des sujets ont une durée d'hospitalisation supérieure à 18 jours
C. Plus de 5% des patients restent hospitalisés au moins 4 semaines
D. Plus de 10% des patients restent hospitalisés au moins 4 semaines
E. Moins de 25% des patients restent hospitalisés entre 3 et 4 semaines

Exercice25

La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

➤ QCM 2

A. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t)=e^{-0,01t}$
B. Pour tout réel t positif, on a : $P(Y \leq t) = 1 - e^{-0,01t}$
C. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est égale à 0,16 au centième près
D. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute

Exercice26

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station A .Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur [0; 6].

1. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5minutes
2. Quel est le temps moyen d'attente à cette station ?

Exercices de révision

Exercice1 (QCM 1 à 4)

On suppose que l'âge auquel un enfant commence à marcher est une variable aléatoire de loi normale de moyenne m=13 mois et d'écart-type $\sigma = 1.5$ mois.

➤ **QCM 1**

A. La probabilité qu'un enfant commence à marcher avant 11 mois est = 0,91 → Faux
B. La probabilité qu'un enfant commence à marcher après 11 mois est = 0,09 → Faux
C. Plus de 50% des enfants commencent à marcher après 13 mois → Faux
D. Environ 82%des enfants commencent à marcher entre12,5 et 14,5 mois → Faux
E. La probabilité qu'un enfant commence à marcher entre10 et 16 mois est environ 0,95 → Vrai.

➤ **QCM 2**

Dans une famille de 5 enfants, tous âgés plus de 11 mois, on veut savoir combien ont commencé à marcher avant 11 mois. On suppose qu'il n'y a pas de facteur génétique dans la marche –donc- les cas sont indépendants. On peut dire pour cette famille que la loi du nombre d'enfants ayant commencé à marcher avant 11 mois est :

A. Une loi de Poisson de paramètre 4,5 → Faux
B Une loi binomiale de paramètres 5 et 0,91 → Faux
C. Une loi binomiale de paramètres 5 et 0,09 → Vrai
D. Une loi normale de moyenne 0,45 et de variance 0,41 → Faux .
E. On ne connaît pas la loi → Faux

- **QCM 3**

A. La probabilité pour que les 5 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est 0,09 → Faux
B. La probabilité pour que les 5 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est $(0{,}09)^5$ → Vrai
C. La probabilité pour que les 5 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est $1-(0{,}09)^5$ → Faux
D. La probabilité pour que 3 des enfants sur les 5 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est $10\ (0{,}09)^3(0{,}91)^2$ → Vrai
E. La probabilité pour que 3 des enfants sur les 5 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est $10(0{,}09)^2(0{,}91)^3$ → Faux

- **QCM 4**

Dans une crèche de 300 enfants, tous âgés plus de 11 mois, on veut savoir combien ont commencé à marcher avant 11 mois. On peut dire pour cette crèche que

A. Le nombre moyen d'enfants qui ont marché avant 11 mois est 27 → Vrai
B. La probabilité pour que plus de 2 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est 0,8461 → Faux
C. La probabilité pour que plus de 2 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est 1 → Vrai.
D. La probabilité pour que moins de 52 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est 1 → Vrai
E. La probabilité pour que plus de 52 enfants aient commencé à marcher avant 11 mois est 0,1539 → Faux.

Exercice2

- QCM 5

Une épreuve comporte 40 QCM indépendants. Chaque QCM de l'épreuve considérée comprend 5 propositions mutuellement exclusives et dont une seule est la bonne réponse.

A. La probabilité pour un étudiant répondant au hasard à un QCM donné d'avoir la bonne réponse est de 20% → Vrai
B. Si l'on attribue 1 pour une bonne réponse à un QCM et 0 pour une réponse fausse à un QCM, les étudiants qui répondent au hasard auront en moyenne une note de 8/40 → Vrai
C. La loi de probabilité que suit la note d'un étudiant qui répond au hasard est une loi normale de moyenne 20 → Faux
D. La loi de probabilité que suit la note d'un étudiant qui répond au hasard est une loi binomiale de paramètre n=40 et p=0,2 → Vrai.
E. La probabilité qu'un étudiant répondant au hasard, réponde juste à plus de la moitié des questions est 0,15 → Faux.

Exercice3

On a constaté au service d'urgence d'un certain hôpital se présentaient en moyenne 3 malades chaque jour. Le nombre de patients se présentant chaque jour est supposé de distribution de Poisson. Lorsque 3 malades au plus se présentent, un médecin peut assurer seul leur prise en charge. Lorsqu'il y a au moins 4 malades, un second médecin est mobilisé.

- QCM 6

A. La probabilité qu'aucun malade ~~ne~~ se présente pas de la journée est 0,1 environ (à 0,01 près) → Faux.
B. La probabilité qu'au plus un malade ~~ne~~ se présente de la journée est 0,2 environ (à 0,01 près) → Vrai.
C. Le nombre moyen de médecins mobilisés pour cette consultation est1,35 environ → Vrai
D. Le nombre moyen de médecins mobilisés pour cette consultation est1,65 environ → Faux
E. Le nombre moyen de médecins mobilisés pour cette consultation est1,92 environ → Faux.

1

Série 4 : A :

Exo 1 :

1/ $\sum p_i = 1$ *

$p_1 = 0{,}3$.
$p_2 = 0{,}1$ $p_4 = 0{,}1$.
$p_3 = 0{,}2$

$0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + p_5 = 1$.

$0{,}7 + p_5 = 1$.

$p_5 = P(X = 2) = 0{,}3$. $p_5 = 0{,}3$.

x_i	-2	-1	0	1,5	2	Σ
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	1
$x_i p_i$	-0,6	-0,1	0	0,15	0,6	0,05
$x_i^2 p_i$	1,2	0,1	0	0,225	1,2	2,725

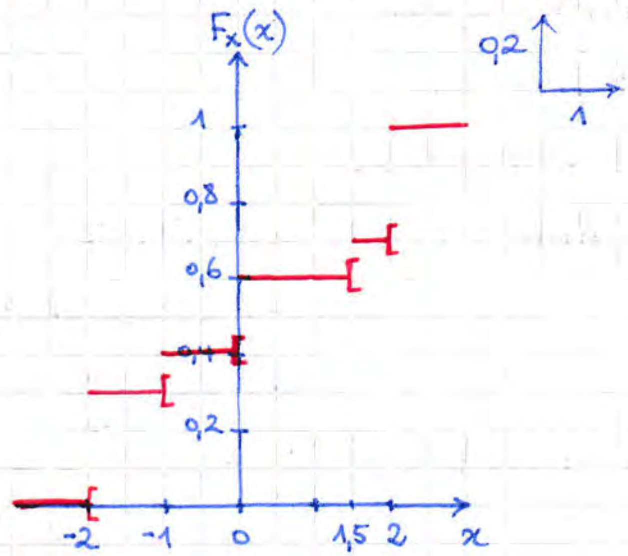
Fonction de répartition :

* Pour que P_X soit une loi de proba, il faut que la somme des probas sur tout son support égale à 1.

$F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum P(X = x_i)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2. \\ P(X \leq -2) = P(X = -2) = 0{,}3 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ P(X \leq -1) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0{,}4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ P(X \leq 0) = P(X \leq -1) + P(X = 0) = 0{,}6 & \text{si } 0 \leq x < 1{,}5 \\ P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 0) + P(X = 1{,}5) = 0{,}7. & \text{si } 1{,}5 \leq x < 2 \\ P(X \leq 2) = P(X \leq 1{,}5) + P(X = 2) = 1. & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

2



2) Calcul de E(X) :

$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P(x = x_i)$.

$= 0{,}3(-2) + 0{,}1(-1) + 0{,}2(0) + 0{,}1(1{,}5) + 2(0{,}3)$.

$E(X) = 0{,}05$.

Calcul de σ(X) :

$\sigma(X) = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 P(x = x_i) - [E(X)]^2$

$= 2{,}725 - (0{,}05)^2$

$\sigma(X) = 2{,}7225$.

3/ Calcul de $P(0 < X \leq 1{,}5)$:

$P(0 < X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) - P(X \leq 0)$.

$= 0{,}7 - 0{,}6$.

$= F(1{,}5) - F(0)$.

$= 0{,}1$.

Calcul de $P(0 < X < 1{,}5)$:

$P(0 < X < 1{,}5) = P(X < 1{,}5) - P(X \leq 0)$.

$= P(X \leq 1{,}5) - P(X = 1{,}5) - P(X \leq 0)$

$= 0$.

Exo 2 :

1/ X : gain du joueur ou sa perte.

$X(\Omega) = \{-80, -25, 0, 50, 100\}$

Calcul des p_i :

$P(X=-80) = \frac{3}{9}$.

$P(X=100) = \frac{2}{9}$.

$P(X=50) = \overset{P(V)}{\frac{4}{9}} \times \overset{P(R/V)}{\frac{2}{8}} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$.

Tirer un jeton rouge sachant qu'on a obtenu un vert au 1er tirage.

$P(X=-25) = \overset{P(V)}{\frac{4}{9}} \times \overset{P(B/V)}{\frac{3}{8}} = \frac{12}{72}$

$P(X=0) = \overset{P(V)}{\frac{4}{9}} \times \overset{P(V/V)}{\frac{3}{8}} = \frac{12}{72}$

$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.

La loi de proba :

x_i	-80	-25	0	50	100	Σ
p_i	3/9	12/72	12/72	1/9	2/9	1
$x_i p_i$	-240/9	-25/6	0	50/9	200/9	-3,05

2/ $E(X) = -3,05$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

$= 4728,18$.

Exo 3 :

1/ Loi de Y :

Y est une v. a définie par $Y = 1 + X^2$.

Support de Y :

$X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$

$y_i = 1 + x_i^2$.

$Y(\Omega) = \{\ ,\ , 5\}$

Calcul des proba :

$P(Y=1) = P(X=0) = 1/7$.

$P(Y=2) = P(X=-1) + P(X=1) = 2/7 + 3/7 = 5/7$

$P(Y=5) = P(X=2) = 1/7$.

$\sum_{i=1}^{3} p_i(Y=y_i) = 1$.

y_i	1	2	5
p_i	1/7	5/7	1/7

2/ Démontrer que :

$E(X^2) = 9/7$.

$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X=x_i) = 9/7$

Démontrer que :

$E(X^4) = 21/7$.

$\sum_{i=1}^{4} x_i^4 P(X=x_i) = 21/7$.

3/ Calcul de E(Y) :

$E(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i P(Y=y_i)$

$= 16/7$.

$E(Y) = E(1+X^2)$.

$= E(X^2) + 1$

$= 16/7$.

Calcule de V(Y) :

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$= 46/7 - (16/7)^2$

$V(Y) = 66/49$.

$V(Y) = V(1+X^2)$

$= 1^2 V(X^2)$.

$= V(X^2)$.

$= E(X^4) - [E(X^2)]^2$

$= 21/7 - (9/7)^2$

$= 66/49$

Exo 4 :

1/ Calculer A pour que $P(X=k)$ soit effectivement une loi de probabilité.

$P(X=k) = Ak$.

$P(X=1) = A$.

$P(X=2) = 2A$.

$P(X=3) = 3A$

$\sum P(X=k) = 1$.

$6A = 1$.

$A = \frac{1}{6}$.

2/ Calculer E(X) :

$k=x_i$	1	2	3	Σ
p_i	1/6	2/6	3/6	1
$x_i p_i$	1/6	4/6	9/6	14/6

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 14/6$.

Calculer V(X) :

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

$= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - [E(X)]^2$.

$V(X) = 6 - \left(\frac{14}{6}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

Calculer σ(X) :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

3/ Calculer E(Y) :

			Σ
$y_i p_i$	0	0,4	0,4
$y_i^2 p_i$	0	0,4	0,4

$E(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i p_i = 0,4$.

Calculer V(Y) :

$V(Y) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - [E(X)]^2$

$= 0,4 - 0,16 = 0,24$.

Calculer σ(Y) :

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,24} = 0,489$.

4/ a/ Déterminer la loi de proba :

$S = X + Y$.

Calculer le support :

$S(\Omega)$.

$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ $Y(\Omega) = \{0,1\}$.



Donc : $S = \{1,2,3,4\}$.

Calculer les proba :

$P(S=X+Y) = P(S=X) \times P(S=Y)$.

$P(S=1) = P(X=1) \times P(Y=0) = \frac{1}{6} \times 0,6 = 0,1$.

$P(S=2) = P(X=1\ ;\ Y=1) + P(X=2\ ;\ Y=0)$

$= P(X=1) \times P(Y=1) + P(X=2) \times P(Y=0)$

$= \frac{1}{6} \times 0,4 + \frac{2}{6} \times 0,6 = 0,27$.

$P(S=3) = P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=0)$.

$= 0,43$.

$P(S=4) = P(X=3, Y=1)$

$= 0,2$.

$\sum p_i = 1$

Donc : S suit une loi de proba.

s_i	1	2	3	4	Σ
p_i	0,1	0,27	0,43	0,2	1
$s_i p_i$	0,1	0,54	1,29	0,8	2,73
$s_i^2 p_i$	0,1	1,08	3,87	3,2	8,25

b/ Calculer E(S) :

$E(S) = 2,73$.

Calculer V(S) :

$V(S) = 0,7871$.

Calculer $\sigma(S)$:

$$\sigma(S) = \sqrt{V(S)} = 0,89.$$

5/ $T = X - 2Y$.

Calculer $E(T)$:

$$E(T) = E(X-2Y) = E(X) + E(-2Y) = E(X) - 2E(Y) = 1,53.$$

Calculer $V(T)$:

$$V(T) = V(X-2Y) = V(X) + 4V(Y) = \frac{5}{9} + 4(0,24) = 1,52.$$

Calculer $\sigma(T)$:

$$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = 1,23$$

Exo 5 :

$\int (x-3)dx =$

a/ $\int_0^4 (x-3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_0^4$

$$= \left[\frac{1}{2}(4)^2 - 3(4)\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - 3(0)\right]$$

$$= -4$$

b/ $\int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_{-1}^2$

$$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 3(2)\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1)\right]$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{16}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

c/ $\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \ln(t)\right]_1^2$

$$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - \ln(2)\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 - \ln(1)\right]$$

$$= 3,14.$$

Exo 6 :

Pour que f soit une densité de proba :

* $f(x) \geq 0$.
* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

a/ $f(x) = \begin{cases} cx & \text{si } 0<x<3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On suppose $f(x) \geq 0$.

$$\int_0^3 cx\,dx = \left[\frac{1}{2}cx^2\right]_0^3 = 1.$$

$$= \frac{9}{2}c = 1.$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{9}.$$

b/ $\int_5^c \frac{1}{7}\,dx = \left[\frac{1}{7}x\right]_5^c$

$$= \frac{1}{7}c - \frac{5}{7}.$$

$$\frac{1}{7}c - \frac{5}{7} = 1.$$

$$c = 12.$$

c/ $\int_0^1 \frac{1}{3}\,dx + \int_1^2 c^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x\right]_0^1 + \left[c^2 x\right]_1^2$

$$= \frac{1}{3} + 2c^2 - c^2$$

$$= \frac{1}{3} + c^2.$$

$$\frac{1}{3} + c^2 = 1.$$

$$c^2 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$c^2 = \frac{2}{3}.$$

$$c = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Exo 7 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+k & \text{si } x \in [-1,1]. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ Déterminer k pour que f(x) soit une densité de proba :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{2}+k\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + kx\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} + k - \frac{1}{4} + k.$$

$$= 2k.$$

$2k = 1.$

$k = \frac{1}{2}.$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1,1]. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2/ Déterminer la fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

* si $x < -1$: $f(x) = 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 = 0.$
* si $x \in [-1;1]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt^{\,0} + \int_{-1}^{x} \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \int_{-1}^{x} \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\right]_{-1}^{x}$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

* si $x > 1$:

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(t)\,dt}_{=1} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt}_{0}$$

$= 1.$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1. \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-1;1]. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3/ Calculer $P(0 < X < 3)$:

$$P(0 < X < 3) = F(3) - F(0) - \underbrace{P(X=3)}_{0}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$P(0 < X < 3) = \frac{3}{4}$$

4/ Calculer $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-1}^{1} \left[x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]dx.$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$E(X) = \frac{1}{3}.$$

Calculer $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)\,dx$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx.$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right] - \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right].$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}.$$

$$V(X) = \frac{2}{9}$$

Calculer $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

11/ Calculer la médiane :

$$F(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ si } -1 \leq x \leq 1. \\ 1 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

La médiane d'une variable aléatoire c'est tout nombre M_e qui satisfait l'égalité $P(X \leq Me) = \frac{1}{2}$.

$$F(Me) = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\Delta = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{cases} Me_1 = 0{,}41. \\ Me_2 = -2{,}41 < 0. \end{cases}$$

Alors : $Me = 0{,}41$.

Exo 8 :

1/ Déterminer la valeur pour laquelle $f(x)$ soit une densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} ke^{-\lambda x}\,dx = k\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= k\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}.$$

$$= k\left[\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^{t}.$$

12/

$$= k.\lim_{t \to \infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

(le premier terme $\to 0$)

$$= k.\frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{k}{\lambda}.$$

$$\frac{k}{\lambda} = 1.$$

$$k = \lambda.$$

2/ Calculer $E(X)$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$= \lambda\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx.$$

$u(x) = x \quad u'(x) = 1.$

$v'(x) = e^{-\lambda x} \quad v(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,dx = \left[x\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(-\lambda x e^{-\lambda x}\right) = 0 - \left[-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E(X) = \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Calculer $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

$$= \lambda\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx.$$

$= \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx.$

$u(x) = x^2. \quad v(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}.$

$u'(x) = 2x \quad v'(x) = e^{-\lambda x}.$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} = \left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\right] - 0 + \frac{2}{\lambda^3}$$

$$= \frac{2}{\lambda^3}.$$

Car : $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda^2} (-\lambda x^2 e^{-\lambda x}) = 0$

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Calculer $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

3/ La fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

si $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0.$

si $x > 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

$$= \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt.$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right]$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4/ Calculer $P(0 < X < 3)$.

$$P(0 < X < 3) = F(3) - F(0).$$
$$= 1 - e^{-3\lambda}$$

Exo 9 :

1/ Calculer $P(1,2 < X < 1,3)$ =

$P(1,2 < X < 1,3)$

$= F(1,3) - F(1,2) = 0,05.$

2/ $P(X < x) = 0,8.$

$\frac{x}{2} = 0,8.$

$x = 1,6.$ C'est le 8e décile.

$P(X \geq x) = 0,4.$

$\Rightarrow 1 - P(X \leq x) = 0,4 \Rightarrow 0,6.$

$\frac{x}{2} = 0,6 \Rightarrow x = 1,2.$

C'est le 6e décile.

$P(X \leq q) = \alpha.$

q est le quantile d'ordre α.

3/ Donner la densité de proba :

$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, 2[.$

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4/ Calculer la moyenne et la variance :

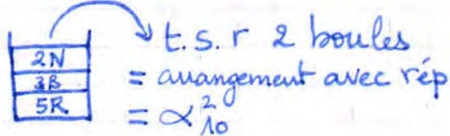
$$E(X) = \int_0^2 x f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

Série 4 : B :

Exo 11 :

1ère Méthode

1/



→ t.s.r 2 boules = arrangement avec rép $= \alpha_{10}^{2}$

On pose : X nbre de B obtenues.

$\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$.

$P(X=0) = \dfrac{\alpha_7^2}{\alpha_{10}^2} = 0{,}49$.

$P(X=1) = \dfrac{\alpha_3^1 \times \alpha_7^1}{\alpha_{10}^2} \times 2! = 0{,}42$.

$P(X=2) = \dfrac{\alpha_3^2}{\alpha_{10}^2} = 0{,}09$.

X_i	0	1	2
P_i	0,49	0,42	0,09

$\Sigma p_i = 1$.
⇒ X suit une loi de proba.

2/ $E(X) = \Sigma x_i P(X = x_i) = 0{,}6$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0{,}42$.

2e Méthode :

1/ Expérience élémentaire : on s'intéresse au nbre de boules blanches, donc "succès".

Ne pas avoir de boules blanches, donc "échec".

⇒ Donc c'est une Bernoulli

Condition de la Bernoulli : tirages indépendants.

Elle se répète n fois de façon indépendante.

$Z_i = \begin{cases} S & \text{si la boule est blanche} \\ E & \text{sinon.} \end{cases}$

on répète $n=2$ fois de façon indépendante.

$S \cap E = \emptyset$.

$P(S) + P(E) = 1$.

$X = \Sigma Z_i \sim \mathcal{B}(2, p)$.

$P = \dfrac{3}{10}$ $\quad X \sim \mathcal{B}(2, \frac{3}{10})$. $\quad k = 0, 1, 2$.

$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$.

$P(X=0) = C_2^0 \, p^0 (1-p)^{2-0}$
$= C_2^0 \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{10}\right)^2$.

$P(X=0) = 0{,}49$.

$P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(1 - \frac{3}{10}\right)^1 = 0{,}42$.

$P(X=2) = C_2^2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{10}\right)^0 = 0{,}09$

2/ $E(X) = np = 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

$V(X) = npq = 2\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{42}{100} = 0{,}42$

3/ $Y = -3X + 2$.

$E(Y) = -3E(X) + 2 = 0{,}2$.

$V(Y) = 9V(X) = 3{,}78$.

Exo 12 :

1/ Expérience élémentaire Bernoulli.

$Z_i = \begin{cases} S & \text{si la réponse est juste} \\ E & \text{sinon} \end{cases}$

On répète $n=4$ fois de façon indépendante.

$S \cap E = \emptyset$ $\quad P(S) + P(E) = 1$.

$P(S) = \frac{1}{3}$. $\quad q = 1 - p = P(E) = \frac{2}{3}$.

$X = \sum_{i=1} Z_i \sim \mathcal{B}(4, \frac{1}{3})$

$P(X=k)=C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$. $k=\overline{0,4}$

1/ $P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}=\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}$

$=0,3$.

2/ $P(X>2)=1-P(X\leq 2)$.

$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0}$

$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}$.

Exo 13 :

1/

L'expérience élémentaire : Bernoulli

$Z_i=\begin{cases} S \text{ si l'ind. présente une allergie.} \\ E \text{ sinon} \end{cases}$

$P(S)=0,3$.

$P(E)=1-P(S)=0,7$.

On répète l'expérience $n=5$ fois de façon indépendante.

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(5;0,3)$.

$P(X=k)=C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$ $k=\overline{0,5}$

2/ $E(X)=np=5\times 0,3=1,5$.

3/ $P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$=C_5^0(0,3)^0(0,7)^5+C_5^1(0,3)^1(0,7)^4=0,53$

Exo 14 : X : nbre de cas d'urgence par ½ h.

1/ $X\rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$.

On pose : Y v. a. désignant le nbre de cas d'urgence par heure qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=4$.

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{t_1}{t_2}$

$Y\rightsquigarrow \mathcal{P}(4)$.

$P(Y=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$.

Donc : $P(Y=5)=e^{-4}\,\frac{4^5}{5!}=0,16$.

2/ $P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)$.

$=1-P(Y=0)$.

$=1-e^{-4}\cdot\frac{4^0}{0!}$

$=0,98$.

Exo 15 :

1/ X est une v.a. qui désigne le nbre de bactéries par litre d'eau.

$X\rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$.

$P(X\geq 3)=1-P(X<3)$.

$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$.

$=1-0,13-0,27-0,27$

$=0,325$.

2/ $\lambda=$ nbre moyen de bactéries par 1,5 l.

Y = v. a qui désigne le nbre moyen de bactéries par 1,5 l.

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y<3)$

$= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2)$.

$= 0,582$.

Exo 17 :

1/ Soit X le nbre d'albinos observés sur un éch. de 100 personnes.

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(100, 0,0103)$.

$p = \frac{103}{10000} = 0,0103$.

$n = 100 > 50$.

$p = 0,0103$.

$np = 1,03 < 10$

$\Rightarrow \mathcal{B}(100, 0,0103) \underset{\infty}{\simeq} \mathcal{P}(\lambda)$

$\lambda = np = 1,03$.

$P(X=0) = e^{-1,03} \frac{(1,03)^0}{0!} = 0,357$.

2/ $P(X \geq 10) = 1 - P(X<10)$.

$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5) - P(X=6) - P(X=7) - P(X=8) - P(X=9)$.

$= 1 - 0,357 - 0,368 - 0,189 - 0,065 - 0,017 - 0,003 - 0,0006 - 0,0000 - 0,00001 - 0,000001$

$= 2,95 . 10^{-4}$.

Exo 18 :

1/ $U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$P(U<2,4) = \Phi(2,4) = 0,9918$

$P(U \geq 1,23) = 1 - P(U<1,23)$.

$= 1 - \Phi(1,23)$.

$= 1 - 0,8907$

$= 0,1093$.

$P(U>3,2) = 1 - P(U<3,2) = 1 - \Phi(3,2)$

$P(-1,96 < U < 1,96) = P(U<1,96) - P(U<-1,96)$

$= \Phi(1,96) - \Phi(-1,96)$

$= \Phi(1,96) + \Phi(1,96) - 1$

$= 0,95$.

2/ $P(U<U_1) = 0,95 \Rightarrow U_1 = 1,65$.

$P(U>U_2) = 0,25 = 1 - P(U<U_2)$

$\Rightarrow P(U<U_2) = 0,75$.

$\Rightarrow U_2 = 0,67$.

$P(U<U_3) = 0,015 < 0,5$ alors $U_3 < 0$

$P(U<U_3) = 1 - P(X<-U_3)$

$= 1 - \Phi(-U_3) = 0,015$

$\Phi(-U_3) = 1 - 0,015$

$\Phi(-U_3) = 0,985$

$\Rightarrow U_3 = -2,17$.

Exo 19 :

1/ $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(32, 49)$.

$P(X>32) = 1 - P(X<32)$

On utilise le changement de variable.

21/ $T = \frac{X-32}{7} \Rightarrow T = \frac{x-32}{7}$

$P(X>32) = 1 - P(X<32)$
$= P(X \geq 32)$
$= 1 - P(T < \frac{32-32}{7})$
$= 1 - P(T<0)$
$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$

$P(X < 32+5) = P(X < 32+7)$
$= P(X<39)$.
$= P(T<1)$.
$= \Phi(1)$.
$= 0,8413$.

$P(32<X<39) = P(0<T<1)$.
$= \Phi(1) - \Phi(0)$.
$= 0,3413$.

2/ $P(X<x_1) = 0,791$

$t = \frac{x-32}{7}$ $X \rightsquigarrow N(\ldots)$

$P(X<x_1) = P(T<t_1) = 0,791$.
$= \Phi(t_1) = 0,791$.

$t_1 = 0,81$.

$x_1 = 37,67$.

$P(|X-32| < x_4) = 0,20$.

$P(|X-32| < x_4) = P(-x_4 < X-32 < x_4)$
$= 0,2$.

$P\left(\frac{-x_4}{7} < \frac{x-32}{7} < \frac{x_4}{7}\right) = 0,2$.

$P\left(T<\frac{x_4}{7}\right) - P\left(T<\frac{-x_4}{7}\right) = 0,2$.

$\Phi\left(\frac{x_4}{7}\right) - \Phi\left(\frac{-x_4}{7}\right) = 0,2$.

$\Phi(t) - \Phi(-t) = 0,2$.

$\Phi(t) - 1 + \Phi(t) = 0,2$.

$2\Phi(t) = 1,2$.

22/ $x_3 = 16,81$ $t = -2,17$

$\Phi(t) = 0,6$.

$t = 0,25 \Rightarrow x_4 = 0,25 \times 7$

$x_4 = 1,75$.

Exo20 :

1/ $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$.

$m = 27$ $\sigma^2 = 25$.

X v.a. mesure de la quantités d'urée dans le sang.

$X \rightsquigarrow N(27, 25)$.

On utilise un changement de variable.

$Z = \frac{X-27}{5}$ $Z = \frac{24,5-27}{5} = -0,5$.

$P(Z < -0,5) = ?$

$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.
$= 1 - \Phi(0,5)$.
$= 1 - 0,6915$.

$\Phi(z) = 0,3085$.

$P(X<24,5) = 0,3085$.

2/ $P(X > x_0) = 0,025$.

$P(X < x_0) = 1 - 0,025$.
$= 0,975$.

$Z \rightsquigarrow N(0,1)$. $x_0 = Z\sigma + m$.

$P(Z<z) = 0,975$.

$z = 1,96$.

$\Rightarrow x_0 = 1,96 \times 5 + 27$.

$x_0 = 36,8$.

Exo 21 :

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$.

$\Rightarrow X \rightsquigarrow N(21, \sigma^2)$.

1/ On a $P(X>32) = 0{,}385$.

$P(X>22) = 1 - P(X<22) = 1 - 0{,}3085$

$= 0{,}6915$.

En utilisant le changement de variables, on obtient : $T = \frac{X-m}{\sigma}$

$t_0 = \frac{22-21}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$

$P(t<t_0) = 0{,}6915 \Rightarrow T_0 = 0{,}5$.

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 0{,}5 \Rightarrow \sigma = 2$.

$X \rightsquigarrow N(21, 2^2)$.

2/ $P(18<X<23) = ?$

$P(18<X<23) = P\left(\frac{18-21}{2} < \frac{X-21}{2} < \frac{23-21}{2}\right)$

$= P(-1{,}5 < Z < 1) \Rightarrow$

$= P(Z<1) - P(Z<-1{,}5)$.

$= \Phi(1) - \Phi(-1{,}5)$.

$= \Phi(1) - [1 - \Phi(1{,}5)]$.

$= 0{,}8413 - 1 + 0{,}9332$.

$= 0{,}7745$.

3/ $P(X>19) = ?$ $P\left(\frac{X-21}{2} > -1\right)$.

$= 1 - P(T<t)$

$= 1 - \Phi(-1)$

$= 1 - 1 + \Phi(1)$.

$= \Phi(1)$

$= 0{,}8413 = 84{,}13\%$

$0{,}8413 \times 300 = 252$ étudiants.

4/ $P(X>x_0) = 0{,}1587$ $x_0 = ?$

$P(X>x_0) = 1 - P(X<x_0) = 0{,}1587$.

$P(X<x_0) = 1 - 0{,}1587$.

$= 0{,}8413$.

$\Phi(z_0) = 0{,}8413$ tel que $z_0 = \frac{x_0 - 21}{2}$

$z_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \times 2$ $21 = 23$ ans.

Exo 22 :

1/ X : le nbre d'individus résistants à l'antibiotique.

- L'expérience élémentaire une Bernoulli.

$Z_i = \begin{cases} S & \text{l'ind. résiste à l'antibiotique} \\ E & \text{sinon} \end{cases}$

On répète l'expérience sur $n = 1000$ ind.

$X = \sum Z_i \rightsquigarrow B(n,p)$.

Estimation de la proportion

$E(X) = np \Rightarrow p = \frac{E(X)}{n} = \frac{625}{1000} = 0{,}0625$.

$X \rightsquigarrow B(1000, 0{,}0625)$.

2/ L'approximation est obligatoire n est très grand.

$n = 1000$

$np = 62{,}5 > 5$.

$nq = 937{,}5 > 5$

} X peut être approximé par la loi normale de paramètre

$m = np = 62{,}5$.

$\sigma^2 = npq = 58{,}6$.

$X \rightsquigarrow N(62,5 ; 58,6)$

$P(X>30) = 1 - P(X<30)$.

$z = \frac{30-62,5}{7,65} = -4,248$.

$P(z>-4,248) = 1 - P(z<-4,248)$.

$= 1 - 1 + \Phi(4,2)$.

$= 0,999987 \simeq 1$.

$P(X>30) = 0,999987 \simeq 1$.

$P(30<X<40) = P\left(\frac{30-62,5}{7,65} < \frac{X-62,5}{7,65} < \frac{40-62,5}{7,65}\right)$

$= P(-4,25 < T < -2,94)$.

$= P(T<-2,94) - P(T<-4,25)$.

$= 1 - \Phi(2,94) - 1 + \Phi(4,25)$.

$= -0,9984 + 0,999987$

Exercices de révision :

Exo 1 :

QCM 1 :

A. X : l'âge auquel un enfant commence à marcher.

$X \rightsquigarrow N(13 ; 2,25)$

$P(X<11) = P\left(\frac{x-m}{\sigma} < \frac{11-m}{\sigma}\right)$.

$= P\left(z < \frac{11-13}{1,5}\right) = P(z<-1,33)$

$= \Phi(-1,33)$

$= 1 - \Phi(1,33)$

$= 1 - 0,9082$

$= 0,0918$.

A → Faux.

B. $P(X>11) = 1 - P(X>11)$

$= 1 - \Phi(-1,33)$

$= 1 - 0,0918 = 0,9028$

B → Faux

C. $P(X>13) = 1 - P(X<13)$.

$= 1 - \Phi(0)$.

$= 1 - 0,5 = 0,5 = 50\%$

C → Faux.

D. $P(12,5<X<14,5) = P\left(\frac{12,5-13}{1,5} < Z < \frac{14,5-13}{1,5}\right)$

$= P(-0,33 < Z < 1)$

$= \Phi(1) - 1 + \Phi(0,33)$

$= 0,4706$

D → Faux.

E. $P(10<X<16) = P\left(\frac{10-13}{1,5} < Z < \frac{16-13}{1,5}\right)$.

$= P(-2<Z<2)$.

$= \Phi(2) - 1 + \Phi(2)$

$= 2\Phi(2) - 1$

$= 0,9544$.

E → Vrai.

QCM 2 :

A. X : nbre d'enfant ayant commencé à marcher avant 11 mois.

$Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n=5, p=0,09)$.

$p = 0,09$ => probabilité qu'un enfant commence à marcher avant 11 mois (du QCM 1).

QCM 3 :

A. $P(Y=5) = C_5^5 (0{,}09)^5 (0{,}91)^0$
$= (0{,}09)^5 = 5{,}9049 . 10^{-6}$.

A → Faux.

B. Vrai.

C. Faux.

D. $P(Y=3) = C_5^3 (0{,}09)^3 (0{,}91)^2$.
$= 10 (0{,}09)^3 (0{,}91)^2$.

D → Vrai

E. Faux

QCM 4 :

A. $n = 300$, $p = 0{,}09$

$X \rightsquigarrow B(300, 0{,}09)$. $\begin{cases} n = 300 > 30 \\ np = 27 > 5 \\ nq = 273 > 5 \end{cases}$

On approxime avec la loi normale.

$m = np = 27$ et $\sigma^2 = npq = 24{,}57$.

$Y \rightsquigarrow N(27 ; 24{,}57)$.

A → Vrai.

B. $P(Y>2) = 1 - P(Y<2) = 1 - P\left(Z < \frac{2-27}{\sqrt{24{,}57}}\right)$
$= 1 - P(Z < -5{,}04)$
$= 1 - \Phi(-5{,}04)$.
$= 1 - 1 + \Phi(5{,}04)$
$= \Phi(5{,}04) = 1$.

B → Faux.

C. Vrai.

D. $P(Y<52) = P\left(Z < \frac{52-27}{\sqrt{24{,}57}}\right) = P(Z < 5{,}44)$
$= \Phi(5{,}44)$
$= 1$.

E.

$P(Y>52) = 1 - P(Y<52)$
$= 1 - \Phi(5{,}04)$
$= 0$.

E → Faux.

Exo 2 :

QCM 5 :

A. Vrai. $P(S) = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$.

B. Vrai calculer la moyenne.
$np = 40 . 0{,}2 = 8$.

C. Faux. $m = 8$.

D. Vrai.

E. $P(X>20) = P\left(Z > \frac{20-8}{\sqrt{6{,}4}}\right)$
$= P(Z > 4{,}8)$
$= 1 - P(Z < 4{,}8)$
$= 1 - \Phi(4{,}8)$
$= 0$

E → Faux.

Exo 3 :

QCM 6 :

A. Faux.

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3)$.

$P(X=0) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = 0{,}05$.

B. $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$
$= 0{,}2$.

B → Vrai.

C. Vrai.

$P(X \leq 3) \to 1$ méd.
$P(X \geq 4) \to 2$ méd.

$1 P(X \leq 3) + 2 P(X \geq 4)$
et